• Να εξεταστεί εάν ο $A=\begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ -i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \notin M(3\times 3, \mathbb{R})$ διαγωνοποιείται και αν ναι διαγωνοποιήστε τον!

ΛΥΣΗ

$$\chi_A(x) = \det(A - xI) = \det\begin{pmatrix} -x & i & 0 \\ -i & -x & -i \\ 0 & i & -x \end{pmatrix} \underset{=}{\overset{Sarrus}{=}}$$

$$= \begin{pmatrix} -x & i & 0 & -x & i \\ -i & -x & -i & -i & -x \\ 0 & i & -x & 0 & i \end{pmatrix} = -x^3 - xi^2 - xi^2 =$$

$$= -x^3 - 2xi^2 = -x^3 + 2x = -x(x^2-2) = \underline{-x(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})}$$

{ο A διαγωνοποιείται αφού $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3 \Rightarrow$ $\Rightarrow$ θα $\exists\, u_1, u_2, u_3$ γραμμ. ανεξ.}

• Για τον $V(0)$:

$$(A - 0I)u = \bar{0} \Rightarrow \begin{cases} iy = 0 \\ ix - iz = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = -z \end{cases} \Rightarrow V(0) = \langle(-1,0,1)\rangle.$$

• Για τον $V(\sqrt{2})$:

$$(A - \sqrt{2}I)u = \bar{0} \Rightarrow \begin{cases} -\sqrt{2}x + iy = 0 \\ -ix - \sqrt{2}y - iz = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = z \\ y = -i\sqrt{2}z \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V(\sqrt{2}) = \langle(1, -i\sqrt{2}, 1)\rangle.$$

• Για τον $V(-\sqrt{2})$:

$$(A + \sqrt{2}I)u = \bar{0} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{2}x + iy = 0 \\ -ix + \sqrt{2}y - iz = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = z \\ y = i\sqrt{2}z \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V(-\sqrt{2}) = \langle(1, i\sqrt{2}, 1)\rangle.$$

⊛ Τα $(1,-i\sqrt{2},1)$, $(1,i\sqrt{2},1)$ και $(-1,0,1)$ κάθετα μεταξύ τους.

ο A μιγαδικός πίνακας και μάλιστα συμμετροσυζυγής πίνακας $\Rightarrow A = \bar{A}^t$ με $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$

Επίσης, κανονικοποιούμε τα διανύσματα.

$$V(0) = \langle (-1, 0, 1) \rangle = \left\langle \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right\rangle$$

$$V(\sqrt{2}) = \langle (1, -i\sqrt{2}, 1) \rangle = \left\langle \left(\frac{1}{2}, \frac{-i\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2} \right) \right\rangle$$

$$V(-\sqrt{2}) = \langle (1, i\sqrt{2}, 1) \rangle = \left\langle \left(\frac{1}{2}, \frac{i\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2} \right) \right\rangle$$

Así $$P = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{i\sqrt{2}}{2} & \frac{i\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$A = P \Lambda P^{-1} = P \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot P^t$$